TITLE:
双曲型偏微分方程式の初期値問題をとくSchemeについて (数値解析の基礎理論および偏微分方程式の数値解法シンポジウム)

AUTHOR(S):
山口, 昌哉

CITATION:
山口, 昌哉. 双曲型偏微分方程式の初期値問題をとくSchemeについて (数値解析の基礎理論および偏微分方程式の数値解法シンポジウム). 数理解析研究所講究録 1966, 18: 63-79

ISSUE DATE:
1966-11

URL:
http://hdl.handle.net/2433/107444

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

数理解析研究所講究録
18巻 1966年 63-80

双曲型偏微分方程式の初期値問題をとく Scheme について

京大 工　山 口 昌 哉

1. 次のような一階の偏微分方程式系を考える，

(1) $$u_t = \sum_{k=1}^{n} A_k u_{x_k}$$

ここでuは未知函数のN次元ベクトルで，A_k は実の定数行列である．初期値問題とは t=0 における値：

(2) $$u(x,0) = \phi(x)$$

をあたえて (1) をみたす解 $u(x,t)$ を求めることであり，その場合に任意の滑らかな ϕ に対して (1), (2) が唯一つの解をもつとき system (1), (2)は Well posed であるという．Well posed であるための必要十分条件はよく知られた次の定理で述べられる．

定理 1. ξ_i, $(i = 1,2,\ldots,n)$ を実数とするとき行列 $\sum_{i=1}^{n} A_i\xi_i$ が任意の ξ に対して real な固有値ばかりをもつことが，(1), (2) の Well posed であるための必要十分条件である．

特に A_i がすべて Symmetric な行列である場合は上の条件は trivial にみたされる．この場合を Symmetric hyperbolic とよぶ．又それに準ずる場合として，ある定数の regular な行列Nがあつてすべての A_i が N による similarity transformation，つまり $N^{-1}AN$ をつくることによつて symmetric になるような場合も同じく hyperbolic である．さらに non symmetric な場合で固有値が $|\xi| \neq 0$ に対して相異なる場合，regularly hyperbolic とよぶ．

さて上の系の数値解法であるが，現在までのほとんどすべての scheme

は symmetric hyperbolic についてのみ考察されて来た．唯一つの例外は P.D.Lax の1958年の論文 Differential equation, Difference Equation, Matrix theory C.P.A.M. Vol.XI であつて，ここでは Friedrichs の scheme が non symmetric の場合にも Von Neumann の条件をみたすことを示している．先ず Lax にならつて non symmetric (特に regularly hyperbolic)がどのくらい多量に存在するかを示しておこう．

例　A_0，B_0 を次の行列とする．

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_0 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$A_0\xi+B_0\eta$ は $\xi^2+\eta^2=1$ に対して固有値 -1，0，1 をもち，したがつて $A_0\xi+B_0\eta$ は symmetric regular hyperbolic である．X を任意の実の行列として $B_0+\varepsilon X=B$ をつくり $A_0\xi+B\eta$ を考えれば ε 十分小のとき regular hyperbolic であることはかわらない。しかしこれは symmetric であつたり，又第2にのべた同時に symmetriciable であるのはごくまれであることが示せる．

次に実際的な理由をのべよう．

1965年 S. Burnstein は次のような方程式系の流体モデルについて数値解法を行なつた．

$$\frac{\partial w}{\partial t} = A(w)\frac{\partial w}{\partial x} + B(w)\frac{\partial w}{\partial y},$$

$$A(w) = -\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{3-\nu}{2}X^2+\frac{1-\nu}{2}Y^2 & (\nu-3)X & (\nu-1)Y & (1-\nu) \\ XY & -Y & -X & 0 \\ \nu XZ+(1-\nu)X(X^2+Y^2) & -\nu Z+\frac{\nu-1}{2}(3X^2+Y^2) & (\nu-1)XY & -\nu X \end{bmatrix}$$

$$B(w) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ XY & -Y & -X & 0 \\ \frac{3-\nu}{2}Y^2+\frac{1-\nu}{2}X^2 & (\nu-1)X & (\nu-3)Y & (1-\nu) \\ \nu YZ+(1-\nu)Y(X^2+Y^2) & (\nu-1)XY & -\nu Z+\frac{-1}{2}(3Y^2+X^2) & -\nu Y \end{bmatrix}$$

ここでwは ρ, ρu, ρv, E を component とするたてのベクトルであって，上の A(w) 中の X,Y,Z はそれぞれ u,v,B 及び $\frac{E}{\rho}$ のことである．そして A(w) 又は B(w) の固有値が0になる場所で不安定がいちぢるしく起ることを観察した．用いた差分法は Lax-Wendroff のものである．Lax-Wendroff の scheme は今まで非線形双曲型の方程式に適用してよい安定性を示していたので S. Burnstein の結果は珍しくその数学的な検討がのぞまれている．その原因の究明については色々の角度からの研究があるだろうがここでは non symmetric な hyperbolic system について今までの scheme の安定性の条件が全く変更なく適用できるものであるかどうかをしらべよう．一方真の non linearity による原因究明についてはいくつかの実験結果をあわせて報告しよう．

2. Difference Scheme の一般論

初期値問題 (1) (2) の解は $u(t) = E_t u(0)$ とかくことができる．ここで E_t はそのフーリエ変換が $e^{i\Sigma A_i \xi_i t}$ であるような函数である．これを [t,t+h] の区間でかけば $u(t+h) = E_h u(t)$ となるがここで次のような近似を考える．

(3) $$u(t+h) = S_k u(t)$$

但し

(4) $$S_k = \sum C_j T^j$$ である

ここで T^j は $T_1^{j_1} T_2^{j_2} \ldots T_n^{j_n}$ をあらわし，T_ν は x_ν 方向への k だけの移動をあらわす作用素である．又 C_j は N×N 定数行列とする．今（2）の $\phi(x)$ が exponential function であるとする．$\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ として

$$\phi(x) = e^{ix,\xi} v \qquad v = \text{constant vector}$$

そのときの（3）をm 回ほどこした解は，$t=mh$ として

$$u(t) = u(mh) = e^{ix,\xi}\left(\sum C_j e^{ikj\xi}\right)^m v$$

である．そこで

(5) $$C(\xi) = \sum_j C_j e^{ij\xi} \qquad \xi \text{ に関する周期函数}$$

とかいて $C(\xi)$ を Amplification Matrix とよぶ。これを用いて安定性，正確度等を定義しておこう．

「安定性」とは（3）について，任意の自然数m に対して kが存在して

(6) $$|C(\xi)^m| \leq K \qquad (m \text{ に無関係な定数})$$

が成立することであり，「正確度」 accuracy がp であるとは，$|\xi|$ 十分小としたとき

(7) $$|e^{i\lambda A\cdot\xi} - C(\xi)| \leq K_1 |\xi|^{p+1}$$

ここで $A\cdot\xi = \sum_{i=1}^{n} A_i \xi_i$ であり，$\lambda = \frac{h}{k}$ である．この２つの概念が uについては L^2- 空間を用いて導いた概念であることは前報告で述べた．（応用数理講究録１０）

又（5）が成立するための必要条件は Von Neumann の条件：

(8) $$|K_p(\xi)| \leq 1 \quad (p=1,2,\ldots,N) \quad |\xi_i| \leq \pi$$

であつて，ここで $k_p(\xi)$ $P=1,\ldots,N$ は $C(\xi)$ の固有値である．

又（8）を更に強くした：

$$(9) \qquad |k_p(\xi)| \leq 1 - \delta|\xi|^{2r} \qquad (p=1,2,\ldots,N) \quad |\xi_i| \leq \pi$$

がみたされるとき（3）の Scheme は dissipation が 2r であるという．これらの言葉をもちいて一般的な安定性の定理がいくつかある．そのうち最も進んだものは Parlettのものである．C.P.A.M. 1966.

定理 2. Symmetric hyperbolic に対しては正確度 2p-2, dissipation 2p であればその Scheme は安定である．

定理 3. 一般の hyperbolic system に対しては正確度 2p-1, dissipation 2p であればその scheme は安定である．

というのが Kreiss １９６４年 C.P.A.M. vol.17. の結果である．但し，この hyperbolicity は regular hyperbolic よりは弱いが定理 1.よりは強い双曲性を仮定している．（ Strong hyperbolicity 応用数理講究録１０ §1 参照 ）

さて次に system (1) が regularly hyperbolic である場合 上と同種類の結果が得られないものであろうか? それについては次の定理がある．

定理 4. (1) が regularly pyperbolic であるならば，正確度 (1) 以上（つまり consistency condition 1 ）で次の条件のいずれかが満足されればその scheme は安定である．

i) $C(\xi)$ は任意の order の dissipation をもつ．

ii) $C(\xi)$ の固有値は $\xi \neq 0$ で相異なり Von Neumann の条件をみたす．

この定理だけ証明しておこう．

1 ） 先ず， $|\xi|=0$ の近傍で $C(\xi)$ は一様に対角化可能である．

$C(0)=I$， $|\xi|$ を十分小にすると次の展開がある．

$$\log C(\xi) = \frac{C(\xi)-I}{1} - \frac{(C(\xi)-I)^2}{2} + \cdots\cdots$$

accuracy ≥ 1 であるので

$$\log C(\xi) = i\lambda A\cdot\xi + R(\xi) \qquad |R(\xi)| \leq O(|\xi|^p),\ p > 1$$

いま $|\xi|=\rho$, $\frac{\xi}{|\xi|}=\xi'$ とおいて $\rho \neq 0$ とすると，

$$\frac{\log C(\xi)}{\rho} = i\lambda A\cdot\xi' + R_1(\rho,\xi') \qquad |R_1(\rho,\xi')| \leq O(|\xi|^{p-1})$$

$A\cdot\xi$ は regular hyperbolic であるから $i\lambda A\cdot\xi'$ は $\xi'=1$ の上で相異なる根をもち，十分小な に対しては $\frac{\log C(\xi)}{\rho}$ も一様に相異なる根をもつ．したがつて一様に対角化可能である．十分小な ρ に対して， $\rho \leq \gamma$ として定数 α_1 と正則行列 T_1 があり

$$\max\ (|T_1|, |T_1^{-1}|) < \alpha_1 \qquad (\rho \leq \gamma)$$

$$T_1 \frac{\log C}{\rho} T_1^{-1} = D \qquad (\text{対角形})$$

したがつて $T_1 C(\xi) T_1^{-1} = e^{\rho D} = \begin{pmatrix} k_1 & & & & \\ & \cdot & & & \\ & & \cdot & & \\ & & & \cdot & \\ & & & & k_N \end{pmatrix}$

となる．

2 ） 次に $\rho \geq \gamma$ に対しては ii) の場合明らかに対角化可能であり， i) の場合を考えよう．ただし $C(\xi)$ が周期函数であることを考慮すれば， $|\xi_i| \leq \pi$ で考えれば十分である．適当なユニタリー行列 $V(\xi)$ によつ

て $C(\xi)$ を上三角行列に変換する.

$$B = UCU^{-1} = K + B_1$$

K は $C(\xi)$ の(対角にならべた)固有値の行列で, B_1 は真の上三角行列である. 次のような対角行列D をとり DBD^{-1} をつくると $DBD^{-1} = K + B_2$ として

$$D = \begin{bmatrix} d & & & \\ & d^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & d^n \end{bmatrix} \qquad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{b_{12}}{d} & \cdots & \frac{b_{1n}}{d^{n-1}} \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{b_{n-1,n}}{d} \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}$$

となる. 条件 i) によつて $K^*K \leq (1-\delta)I$ δ: constant

$$(K + B_2)^*(K + B_2) = K^*K + K^*B_2 + KB_2^* + B_2^*B_2$$

によつて, d を十分大にとれば $(K + B_2)^*(K + B_2) \leqq I$

が示せる. よつて $T_2 = DU$ とおけば, α_2 定数として

$$\max(|T_2|, |T_2|^{-1}) \leq \alpha_2$$

$$|T_2 C T_2^{-1}| \leq 1$$ が証明される

条件 ii) の場合は明らかである.

以上の一般論にもとずいて具体的な scheme の安定性を主として regularly hyperbolic の場合にしらべて見よう.

3. 具体的な scheme

α) Friedrichs の Positive Scheme

単独方程式については前の報告で紹介した. ここ以後は次元 n=2 と仮定しよう. (1) は $U_t = AU_x + BU_y$ とかく.

Friedrichs の scheme は (1) において u_t を $\frac{u(t+h)-u(t)}{h}$ で u_x を $u(x+k,t)-u(x-k,t)/2k$ でおきかえたものであつて，$\tilde{u}(t)$ は $u(x+k,y,t)$, $u(x-k,y,t)$, $u(x,y+k,t)$, $u(x,y-k,t)$ の平均である．
$u(t+h) = S_k u(t)$ としたときの S_k をかくと

$$S_k = \frac{1}{4}(I+2\lambda A)T^x_{+1} + \frac{1}{4}(I-2\lambda A)T^x_{-1} + \frac{1}{4}(I+2\lambda B)T^y_{+1} + \frac{1}{4}(I-2\lambda B)T^y_{-1}$$

$\lambda = \frac{h}{k}$ であつた

Amplification Matrix $C(\xi,\eta)$ は

$$C(\xi,\eta) = C_1 e^{i\xi} + C_2 e^{-i\xi} + C_3 e^{-i\eta} + C_4 e^{-i\eta}$$

$$C_{1,2} = \frac{1}{4}(I\pm 2\lambda A), \qquad C_{3,4} = \frac{1}{4}(I\pm 2\lambda B)$$

この Scheme については $\sum_{i=1}^{4} C_i = I$ が成立してしたがつて accuracy 1以上 (consistency condition) であつて，今もし $I \pm 2\lambda A \geq 0$ 及び $I \pm 2\lambda B \geq 0$ が仮定されるならば $C_i \geqq 0$ である．ここからこの scheme が positive といわれるわけである．その場合に安定性を示そう．

(*) $\quad C(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} C_i Z_i$ とかく $|z_i| = 1$ $(i=1,2,3,4)$である

今 $z_i = x_i + iy_i$ とかくとき $C(\xi,\eta)-I=\sum C_i(x_i-1)+i\sum C_i y_i$ とかかれる．そこで P.D.Lax の次の定理を用いる．

定理 (Lax) $X\xi+Y\eta$ が (1) の意味で hyperbolic で $X\leq 0$ ならば，$X+iY$ の固有値の実部は正でない．

この定理を $-X=\sum c_i(1-x_i)\geqq 0$, $Y=\sum c_i y_i$
に用いたならば $C(\xi,\eta)-I$ の固有値の実部が正でないことがわかる．定理の仮定は C_i が A, B の実係数の一次結合であることから明らかにみたされる。ところで式 (*) に $e^{i\vartheta}$ $|\vartheta|\leq\pi$ をかけたものについても同様の議論ができるので結局 $C(\xi,\eta)$ の固有値の絶対値は1をこえぬ Von Neumann の条件，

一方 $C(\xi,\eta)=\frac{I}{2}(\cos\xi+\cos\eta)+i\lambda(A\sin\xi+B\sin\eta)$ とかけるので一様に対称化可能であることもよい．定理4. ii) により安定である．まとめると
「 Friedrichs の scheme は $I+2\lambda A\geqq 0$, $I+2\lambda B\geqq 0$ のとき安定である．」

β) Lax Wendroff の scheme について

先ず

n=1 の場合 (1) は $u_t=Au_x$ となる． $u_{tt}=A^2u_{xx}$ が微分により出る．

Taylor expansion

$$u(t+h)=u(t)+hu_t+\frac{h^2}{2!}u_{tt}+O(h^3)$$

上式を代入して

$$u(t+h)=u(t)+hAu_x+\frac{h^2}{2!}A^2u_{xx}+\cdots\cdots$$

2次までで打切り， u_x を $\frac{(T_{+1}-T_{-1})}{2k}u$, u_{xx} を $\frac{\left(T_{+\frac{1}{2}}-T_{-\frac{1}{2}}\right)^2}{k^2}u$ でおきかえて次の scheme を得る． $u(t+h)=S_ku(t)$ として

$$S_k=I+\lambda A\frac{T_{+1}-T_{-1}}{2}+\lambda^2A^2\frac{T_{+1}+T_{-1}-2T_0}{2}$$
(10)
$$C(\xi)=I+i\lambda A\sin\xi-\lambda^2A^2(I-\cos\xi)$$

accuracy 2 で一様に対角化可能である．定理3.によつて Von Neumann

の条件のみ確めればよい．Aの固有値を μ, $C(\xi,\eta)$ のそれを kとすると，spectral mapping theorem により

$$k = 1 + i\lambda\mu\sin\xi - \lambda^2\mu^2(1-\cos\xi)$$
$$|k|^2 = 1 - (1-\cos\xi)^2\left\{(\mu\lambda)^2 - (\mu\lambda)^4\right\}$$

したがつて，「 $I\pm\lambda A\geqq 0$ が満足されるとき $n=1$ の Lax Wendroff scheme は安定である」

注意 $|k|^2$ の式のなかで $\mu=0$ がおこれば $|k|=1$ となりdissipation=0であり，A の固有値が 0でなければ dissipation 4 で丁度 Parlett の定理が symmetric ならば適用できる．

次に $n=2$ の場合の Lax Wendroff の scheme について検討する．その前に regularly hyperbolicity について $n=2$ のとき， $N=2$ と $N>2$ とでは本質的に差のあることを次の注意 1.で明らかにしよう。

注意 1. $N=2$ の regular hyperbolic system (1) については A_i は常に同時に対称化可能である．

証明 i) $A\xi+B\eta$ において Aを対角行列と考えてよい．何故ならAを対角化する行列Nで A, B を変換して $A'=N^{-1}AN$, $B^1=N^{-1}BN^{-1}$ として A', B' について論じて仮定も結論も同じである．

ii) $MX =$ 対称 M symmetric positive $\Leftrightarrow N^{-1}\times N =$ 対称 $|N|\neq 0$

であることに注意すると MA, MB が対称なような positive symmetric M を求めればよい．しかもMは対角行列でよい．

$$\because \quad M\begin{bmatrix} d_1 & \\ & d_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1m_{11} & d_2m_{12} \\ d_1m_{12} & d_2m_{22}\end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} m_{12}(d_1-d_2)=0 \\ m_{12}=0\end{matrix}$$

iii) $A = \begin{bmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2\end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d\end{bmatrix}$ とすれば

regular hyperbolicity より $bc>0$, したがつて $M=\begin{bmatrix} c & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$

注意 2. $A^2\xi+B^2\eta$ が再び ξ,η (実) に対して hyperbolic であれば $\zeta\geq 0,\ x\geq 0,\ \zeta^2+x^2\neq 0$ に対して $A^2\zeta+B^2x\geqq 0$. (A,B のどちらも 0 の固有値をもつことがなければ $\zeta>0,\ x>0$ について $A^2\zeta+B^2x>0$ これは Lax の convexity theorem である

$$\lambda\min(A^2\zeta+B^2x) = (\zeta+x)\lambda\min\left(\frac{\zeta}{\zeta+x}A^2+\frac{x}{\zeta+x}B^2\right)$$

$$\geq \lambda\min(A^2)\zeta+\lambda\min(B^2)x > 0$$

さて $n=2$ の Lax Wendroff の scheme を紹介しよう. (10) の式と同じ導き方で,

$$u(t+h) = S_k u(t)$$

(11) $$S_k = I+\lambda\left(A\frac{T^x_{+1}-T^x_{-1}}{2}+B\frac{T^y_{+1}-T^y_{-1}}{2}\right)+\frac{\lambda^2}{2}\left\{A^2(T^x_{+\frac{1}{2}}-T^x_{-\frac{1}{2}})^2\right.$$
$$\left.(BA+AB)(T^x_{+1}-T^x_{-1})(T^y_{+1}-T^y_{-1})+B^2(T^y_{+\frac{1}{2}}-T^y_{-\frac{1}{2}})^2\right\}$$

Amplification matrix $C(\xi,\eta)$ は

(12) $$C(\xi,\eta) = I+i\lambda(A\sin\xi+B\sin\eta)-\lambda^2\left\{A^2(1-\cos\xi)\right.$$
$$\left.\frac{1}{2}(BA+AB)\sin\xi\sin\eta+B^2(1-\cos\eta)\right\}$$

(13) $$C(\xi,\eta) = I+i\lambda(A\sin\xi+B\sin\eta)-\frac{\lambda^2}{2}(A\sin\xi+B\sin\eta)^2$$
$$-2\lambda^2\left(A^2\sin^4\frac{\xi}{2}+B^2\sin^4\frac{\eta}{2}\right)$$

この安定性については P.D. Lax の次の結果がある.

「A, B symmetric のとき,

(14) $$I\pm 2\sqrt{2}\lambda A\geqq 0,\qquad I\pm 2\sqrt{2}\lambda B\geqq 0$$

ならば安定である．」

したがつて A, B が同時に対称化可能である場合，対称化したもの（similarity で）を A, B として用いれば上の結果で十分である．したがつて n=2, N=2 ならば問題はない．

しからば N>2 で A, B が同時に対称化不可能な場合はどうであろうか．答は一般的には否定的である．それは一言にして言えば注意 2.を考えると $A^2\xi+B^2\eta$ がもはや hyperbolic とは言えないからである．

例　A, B を次のものとしよう．

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}, \qquad B=\begin{bmatrix}0 & 1 & \varepsilon\\ 1 & 0 & 0\\ -\varepsilon & 0 & 0\end{bmatrix} \quad \varepsilon>0 \text{ 小さい}$$

$A\xi+B\eta$ については次のことが示しうる

i)　$A\xi+B\eta$　regularly hyperbolic

ii)　A, B　は同時に対称化不可能

iii)　$\xi>0$, $x>0$, $A^2\xi+B^2x$ は負の一根をもつ．

iii) を示そう．

$$A^2\xi+B^2x=\begin{bmatrix}\xi+(1-\varepsilon^2)x & 0 & 0\\ 0 & \xi+x & \varepsilon x\\ 0 & -\varepsilon x & -\varepsilon^2 x\end{bmatrix}, \quad |A^2\xi+B^2x|=(\xi+(1-\varepsilon^2)x)(-\varepsilon^2\xi x)$$

実は $A^2\xi+B^2x$ は $\xi>0$, $x>0$ に対しては実根ばかりをもち，$\xi>0$, $x<0$ で虚根をもつ．

今 $C(\pi,\pi)$ を考えると (13) より $C(\pi,\pi)=I-2\lambda^2(A^2+B^2)$ したがつてどんなに λ が小さくても $C(\pi,\pi)$ の固有根の一つは 1 より大きくなり Von Neumann の条件が破れる．

この不安定性は Lax-Richtmeyer の意味のみでなく Forsyth-Wasow

の意味でも不安定といえるものであつて, $\|S_k^n\|$ は $\exp(\frac{1}{k})$ で大きくなる. $(n=\frac{1}{k})$

この例ではAにもBにも固有値 =0 がおこつたが A又はBのみに固有値 =0 が起る例も考えられる.

$$A = \begin{bmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & m & 1 \\ k & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{c} m+k \neq 0 \\ m \neq k \\ p \text{ 十分大} \\ 4(mk-2)^3-27(m+k)^2 \geq 0 \end{array}$$

注意　この例が N=3 であり, A, B が共に0を固有根にもつていることは注目すべきことである. $A\xi+B\eta$ が 0の固有根をもたずしかも上のようになる例は不明である.

scheme を変更して次のようにすれば安定性が言える. (野木達夫　京大・工　修士論文 1965)

1)　$C(\xi,\eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^2$

2)　$C(\xi,\eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \frac{i}{4}\lambda^3(A\sin\xi + B\sin\eta)^3$

1) は accuracy 1, 2) は accuracy 2 であつてそれぞれ

$$\lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 \leq I$$

$$\lambda^2(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 \leq 4I$$

のとき安定性がいえる.

最後に n=2, N>2 の場合にも通用する十分条件を説いておこう. つまり

$$\frac{\partial u}{\partial t} = A\frac{\partial u}{\partial x} + B\frac{\partial u}{\partial y} \tag{15}$$

の初期値問題について, 次のような Amplification Matrix をもつ Lax-Wendroff scheme が mesh ratio λ を十分小にしたとき安定であるた

めの十分条件である．

$$(16)\quad C(\xi,\eta) = I + i\lambda(A\sin\xi + B\sin\eta) - \frac{\lambda^2}{2}(A\sin\xi + B\sin\eta)^2 - 2\lambda^2\left(A^2\sin^4\frac{\xi}{2} + B^2\sin^4\frac{\eta}{2}\right)$$

ここで　$A\sin\xi + B\sin\eta = A_0(\xi,\eta)$

$A^2\sin^4\frac{\xi}{2} + B^2\sin^4\frac{\eta}{2} = A_1(\xi,\eta)$　とおき　$|\xi| \leq \pi$,　$|\eta| \leq \pi$　で

考える．この記号を用いて十分条件は次のように述べられる．

1）　A 又は B が　zero　の固有値をもたぬ．

2）　$A^2\xi+B^2\eta$　がすべての　real　ξ,η　に対して　real　の固有値ばかりをもつ．（つまり hyperbolic　）

3）　φ_0, ψ_0 をそれぞれ　$A_0(\xi,\eta)$ 及び $A_0^*(\xi,\eta)$　の同じ固有値に対応する固有ベクトルで $\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle > 0$ をみたすものとするとき

$$\langle A_1(\xi,\eta)\varphi_0, \psi_0 \rangle \geqq C\langle \varphi_0, \psi_0 \rangle \qquad C > 0$$

が満足される．

証明

i)　注意 2.によつて仮定1）2）から，$|\xi| = \pi$　$|\eta| = \pi$　の十分近傍では　$A^2\sin^4\frac{\xi}{2} + B^2\sin^2\frac{\eta}{2} \geqq c > 0$ したがつてこのような領域 $\pi-\varepsilon \leq |\xi| \leq \pi$,　$\pi-\varepsilon \leq \eta \leq \pi$　では　$C(\xi,\eta)$　の根　$|k_i(\xi,\eta)| \leq 1 - \frac{C}{2}$ となり positive dissipation　が示される．

ii)　次に上のような点 $|\xi| = \pi$, $|\eta| = \pi$　の近傍をのぞいた領域でも positive dissipation　が保証されることを示そう．そのための条件が 3）である．

λ に関する perturbation の方法を用いる.

$\rho = \sqrt{\sin^2\xi + \sin^2\eta}$ として $\dfrac{\sin\xi}{\rho} = \xi'$, $\dfrac{\sin\eta}{\rho} = \eta'$ $\xi'^2 + \eta'^2 = 1$

$\dfrac{A_1(\xi,\eta)}{\rho} = A_1'(\xi,\eta)$ とおく. そして次のような matrix を考える.

$$C_1(\xi,\eta) = iA_0(\xi',\eta') + (-1)\lambda\left\{\frac{\rho}{2}A_0(\xi',\eta')^2 + 2A_1'(\xi,\eta)\right\}$$

このような (ξ',η') に対して $A_0(\xi',\eta')$ の固有値が distinct realで2根の差は下からおさえられていることは regular hyperbolicity による. λを十分小にすれば $C_1(\xi,\eta)$ の固有根はλの Taylor 級数で表わされ収束する. それを実行すると, $C_1(\xi,\eta)$ の固有値を $\nu(\xi,\eta)$ として, 固有ベクトルを $\phi(\xi,\eta)$ として

$$\nu(\xi,\eta) = \nu_0 + \lambda\nu_1 + \lambda^2\nu_2 + \cdots\cdot$$

$$\phi(\xi,\eta) = \phi_0 + \lambda\phi_1 + \lambda^2\phi_2 + \cdots\cdot$$

$C_1(\xi,\eta)\phi = \nu\phi$ に代入して

$$[iA_0(\xi',\eta') - \lambda\left\{\frac{\rho}{2}A_0(\xi',\eta')^2 + 2A_1'(\xi,\eta)\right\}][\phi_0 + \lambda\phi_1 + \cdots\cdot$$

$$= (\nu_0 + \lambda\nu_1 + \cdots\cdot\ )(\phi_0 + \lambda\phi_1 + \cdots\cdot\ )$$

λ_0^0 の項を比較して $iA_0(\xi',\eta')\phi_0 = \nu_0\phi_0$

したがつて $A_0(\xi',\eta')$ の1つの固有値を μ_0とすると $\nu_0 = i\mu_0$, ϕ_0 は $A_0(\xi',\eta')$ の対応する固有ベクトル, それをφ_0 とすれば $\phi_0 = \varphi_0$, λ' の項を比較して,

$$iA_0(\xi',\eta')\phi_1 - \left\{\frac{\rho}{2}A_0(\xi',\eta')^2 + 2A_1(\xi,\eta)\right\}\varphi_0$$

$$= i\mu_0\phi_1 + \nu_1\varphi_0$$

$$i[A_0(\xi',\eta') - \mu_0E]\phi_1 = (\nu_1E + \frac{\rho}{2}A_0(\xi',\eta')^2 + 2A_1(\xi,\eta))\varphi_0$$

が non trivial solution をもつための必要十分条件は，φ_0 を $A_0^*(\xi',\eta')$ の固有ベクトルとしたとき（但し $\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle > 0$ ととる）

$$\langle(\nu_1 E + \frac{\rho}{2}A_0(\xi',\eta')^2 + 2A_1'(\xi,\eta))\varphi_0,\varphi_0\rangle = 0$$

である．

$$\nu_1 = -\frac{\langle(\frac{\rho}{2}A_0(\xi',\eta')^2 + 2A_1'(\xi,\eta))\varphi_0,\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle}$$

$$= -\frac{\rho}{2}\mu_0{}^2 - \frac{2\langle A_1'(\xi,\eta)\varphi_0,\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle}$$

$\dfrac{\langle A_1'(\xi,\eta)\varphi_0,\varphi_0\rangle}{\langle\varphi_0,\varphi_0\rangle} = k$ とおけば条件 3）により $k \geqq \frac{c}{\rho} > 0$ である．

したがつて ν の展開は，

$$\nu = i\mu_0 + \lambda(-\frac{\rho}{2}\mu_0^2 - k) + \lambda^2\nu_2 + \cdots\cdot$$

$C(\xi,\eta)$ の固有値 $k(\xi,\eta)$ の展開は $\mu_0(\xi,\eta)$ の ξ,η に関する homogenuity により

$$k(\xi,\eta) = 1 + i\lambda\mu_0(\xi,\eta) - \lambda^2(\frac{\mu_0{}^2}{2} + k\rho) + \lambda^3\nu_2\rho + \cdots$$

したがつて，

$$|k(\xi,\eta)|^2 = \left\{1 - \lambda^2(\frac{\mu_0{}^2}{2} + k\rho) + \lambda^3\mathrm{Re}(\nu_2\rho) + \cdots\right\}^2$$
$$+\left\{\lambda\mu_0 + \lambda^3\mathrm{Im}(\nu_0\rho) + \cdots\right\}^2$$
$$= 1 - 2\lambda^2 k\rho + \lambda^3 * + \cdots$$

したがつて λ 十分小のときたしかに positive dissipation がある．これで定理 4.の仮定 i) がすべてみたされたことになり， scheme は安定である．例えば trivially に A, B を同時に対称化可能のとき 3) はみた

される．更に $A = A_0$, $B = B_0 + \varepsilon X$　$\varepsilon|X| \le |\lambda_{min}(A)|$ or $|\lambda_{min}(B)|$ のとき(A_0, B_0 は symmetric) の時にもみたされる．更に一つの定数行列 Nによつてこのように変換できるときにも上の仮定3）はみたされる．